Der Gnomonschatten

Schatten sind eigenartig flüchtige Gebilde. Sie verdanken sich vollkommen dem Licht, der Negation ihrer selbst. Sie - für sich selbst - sind nichts. Das gilt auch für den Gnomonschatten, den Zeiger der Sonnenuhr. Obwohl also eigentlich ein Nichts, ist er der eigentliche Akteur auf der Bühne aus Stunden- und Datumslinien, auf dem er sein täg- und jährlich wiederkehrendes Schauspiel unter der Regie der Sonne aufführt (s.Abb. 1).

Abb. 1: Gnomon mit Schattenwurf der Apg-Sonnenuhr

Die Sonne als Regisseur dieser Schattenbewegungen vollführt zwei Bewegungen am Himmelsgewölbe: Eine tägliche von Ost nach West und eine jährliche senkrecht dazu (s. Abb. 2). Der Gnomonschatten ist ein Abbild dieser doppelten Bewegung der Sonne. Die jährlich periodische Höhenänderung der Sonne, die sog. Deklination δ, wird vom Himmelsäquator aus gemessen. Dabei ändert die Sonne im Laufe eines Jahres ihre Höhe um knapp 47° (s. Abb.2).

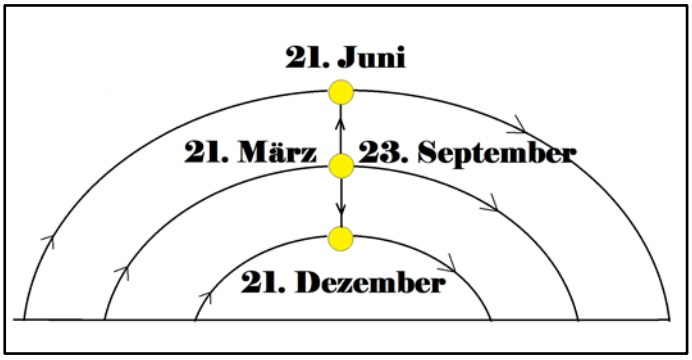


Abb. 2: Die Sonnenbahnen im Laufe eines Jahres

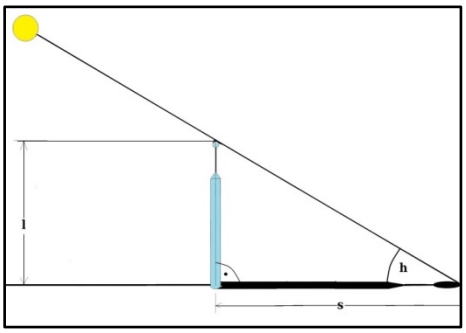


Abb. 3: allgemeine Winkelbeziehung für Schattenwurf

Schatten und Gnomon bilden ein rechtwinkeliges Dreieck (s. Abb. 3). Für die Katheten l und s dieses Dreiecks gilt in Bezug auf den Höhenwinkel der Sonne h: $\frac{l}{s} = \tanh$.

Die Bestimmung des Schattens ist im Allgemeinen eine recht komplizierte Angelegenheit. Beschränkt man sich allerdings auf den Zeitpunkt der *Kulmination* der Sonne, d.h. den mittäglichen Höchststand (12:00 WOZ) ist das Problem relativ einfach. Denn dann liegen Polachse und Schatten in der gleichen Ebene (s. Abb. 4). Für die Kulminationshöhen der Sonne gilt dann, wie aus dem Vergleich der beiden Dreiecke aus Gnomon und Polachse sowie Gnomon und Schatten ersichtlich ist, die einfache Winkelbeziehung: $h = (90° - \varphi) + \delta$. Damit kann der Schattenwurf relativ einfach berechnet werden. Dies sei hier für ausgewählte Daten des jährlichen Sonnenlaufs, den Äquinoktien (21.3. und 23.9.), sowie dem Sommer- (21.6.) und dem Wintersolstitium (21.12.) gezeigt.

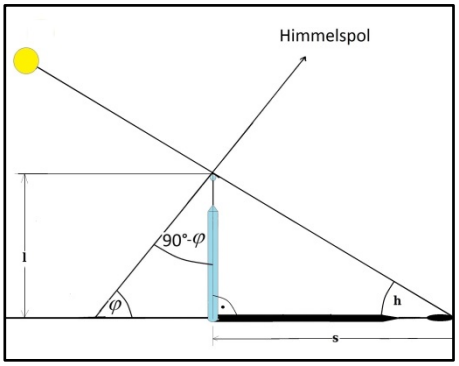


Abb. 4: Winkelbeziehungen bei Kulmination: Polachse und Schatten liegen in einer Ebene

Bestimmung ausgewählter Schatten bei Sonnenkulmination (12:00 WOZ)

Am 21. März und 23. September steht die Sonne genau auf dem Himmelsäquator (s. Abb. 5). Das bewirkt, dass an diesen beiden Tagen der lichte Tag und die dunkle Nacht gleich sind. Daher der Name Tag- und Nacht-Gleiche oder *Äquinoktium*[1]. Dann ist dieser Winkel gleich der geographischen Breite des Beobachtungsortes, also für die APG-Sonnenuhr 50,93°. Dann gilt für den Zeitpunkt der Kulmination der Sonne in diesem Dreieck: $\frac{l}{h} = \tan\varphi \Leftrightarrow \underline{\underline{s = h \cdot \tan\varphi}}$

Mit der Gnomonhöhe h = 3m und φ = 50,93° folgt: $s = 3m \cdot \tan 50{,}93° = \underline{\underline{3{,}70m}}$

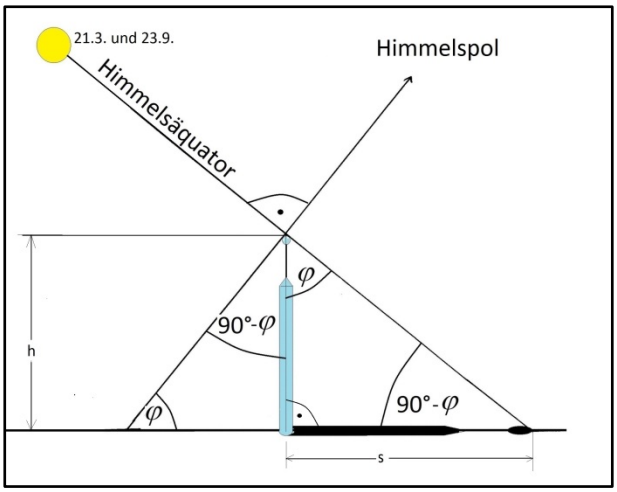


Abb. 5: Winkelbeziehungen für den Kulminationsschatten bei den Äquinoktien

Am 21.6. hat die Sonne (auf der Nordhalbkugel) ihren höchsten Stand erreicht und kehrt ab diesem Tag ihre Höhenbewegung wieder um. Daher der Name *Sommersonnenwende* oder auch *Sommersolstitium*[2], weil sie in Ihrer jährlichen Höhenbewegung für einen Moment still steht. Der Winkelabstand vom Himmelsäquator, die Deklination δ, ist dann maximal und beträgt dann 23,44°. Der Winkel an der Gnomonkugel in dem Dreieck aus l und s ist dann um δ verringert (s. Abb. 6). Die obige trigonometrische Beziehung verändert sich damit zu:

$$\frac{l}{h} = \tan(\varphi - \delta) \Leftrightarrow \underline{\underline{l = h \cdot \tan(\varphi - \delta)}}$$

und mit den gegebenen Größen ergibt sich:

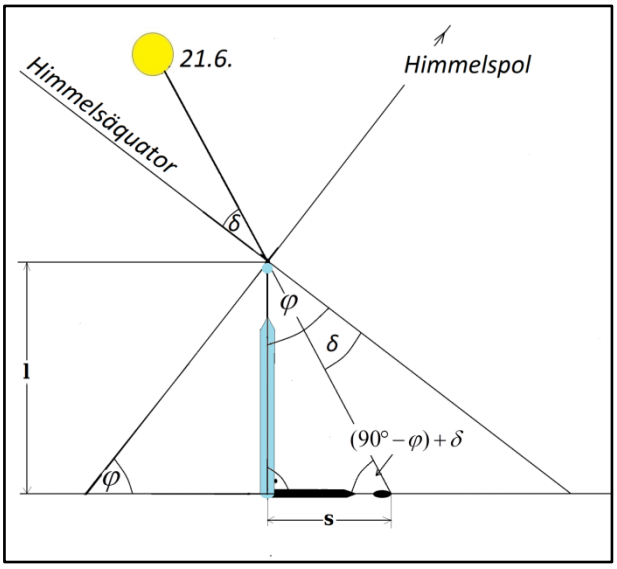


Abb. 6: Winkelbeziehungen für den 21.6.

$$l = 3m \cdot \tan(50{,}93° - 23{,}44°)$$
$$\Leftrightarrow l = 3m \cdot \tan 27{,}49° = \underline{\underline{1{,}56m}}$$

[1] von den lat. Worten *aequus* = *gleich* und *nox, noctis* = die *Nacht*
[2] von sol, solis = die Sonne und stare = stehen, stitium = der (Still)stand

Am 21.12. erreicht die Sonne ihren jährlichen Tiefststand. Es ist der Tag der Wintersonnenwende oder Wintersolstitium. Die Deklination ist nun negativ (-23,44°), d.h. der Winkel an der Gnomonkugel erhöht sich um die Deklination δ (s. Abb. 5) und die Dreiecksbeziehung wird zu:

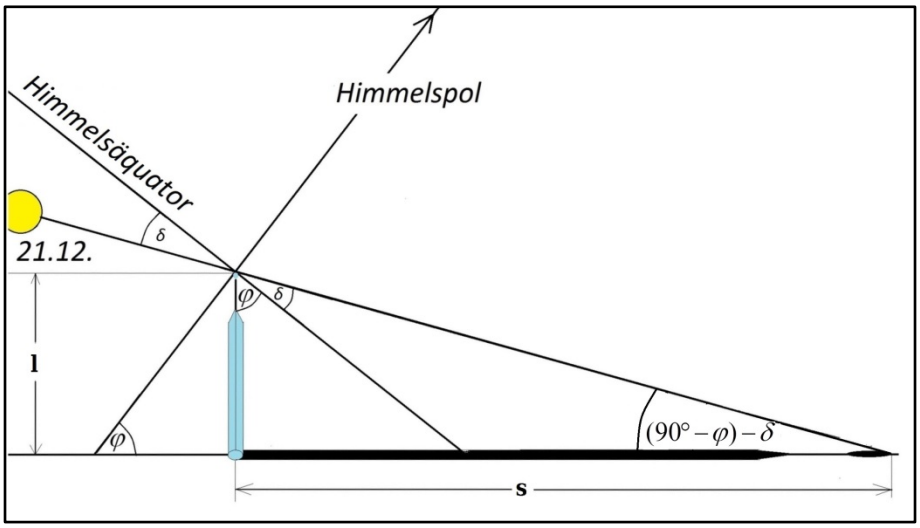


Abb. 7: Winkelbeziehungen für die Mittagsschattenlänge am 21.12

$$\frac{l}{h} = \tan(\varphi + \delta)$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{l = h \cdot \tan(\varphi + \delta)}}$$

Einsetzen ergibt dann:

$$l = 3m \cdot \tan(50{,}93° + 23{,}44°)$$
$$\Leftrightarrow l = 3m \cdot \tan 74{,}37° = \underline{\underline{10{,}72m}}$$

Will man für einen beliebigen Tag die Kulminationsschattenlänge berechnen, benötigt man den Wert der Deklination der Sonne für diesen Tag.

Tag	Jan	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
1.	-23,08	-17,38	-7,96	4,16	14,77	21,92	23,18	18,28	8,65	-2,8	-14,11	-21,7
6.	-22,61	-15,92	-6,05	6,07	16,25	22,55	22,79	16,98	6,82	-4,73	-15,68	-22,4
11.	-21,96	-14,34	-4,49	7,95	17,62	23,01	22,24	15,57	4,94	-6,64	-17,15	-22,9
16.	-21,12	-12,67	-2,13	9,77	18,87	23,31	21,53	14,37	3,03	-8,52	-18,49	-23,3
21.	-20,12	-10,91	-0,16	11,5	19,98	23,44	20,67	12,45	1,1	-10,3	-19,7	-23,4
26.	-18,96	-9,09	1,81	13,2	20,95	23,39	19,66	10,77	-0,58	-12,1	-20,75	-23,4
31.	-17,65		3,77		21,77		18,52	9,01		-13,8		-23,2

Abb. 8: Deklinationstabelle der Sonne

Bei der Überprüfung dieser Ergebnisse muss dreierlei beachtet werden:
1. Da die Sonne eine ausgedehnte Lichtquelle ist, ist der Schatten der Gnomonkugel nicht scharf. Dadurch ist die Ablesegenauigkeit beeinträchtigt. Dies trifft ganz besonders im Winterhalbjahr zu, wenn die Schatten sehr lang sind (s. Abb. 9).
2. Bei der Vermessung der Linien hat sich leider (!) ein Fehler eingeschlichen, so dass der Kulminationsschatten nicht exakt auf die XII-Stundenlinie fällt[3]. Nachträglich ist mit feinen in die Bodenplatten eingelassenen Metallstiften die korrekte XII-Linie gekennzeichnet. Will man die

[3] Für die Ablesung der Sonnenuhrzeit und ihre Umrechnung spielt dieser Fehler keine Rolle, da er mit den Korrekturwerten der der Umrechnungstabelle verrechnet ist.

berechneten Schattenlängen kontrollieren, muss man auf dieser Linie messen.
3. Die Berechnungen gelten nur für eine vollkommen waagerechte Oberfläche. Das ist aber bei der Schulhofoberfläche nicht exakt der Fall.
Unter dieser Voraussetzung sind die gemessenen Ergebnisse gut reproduzierbar.

Abb. 9: verwaschener Kugelschatten

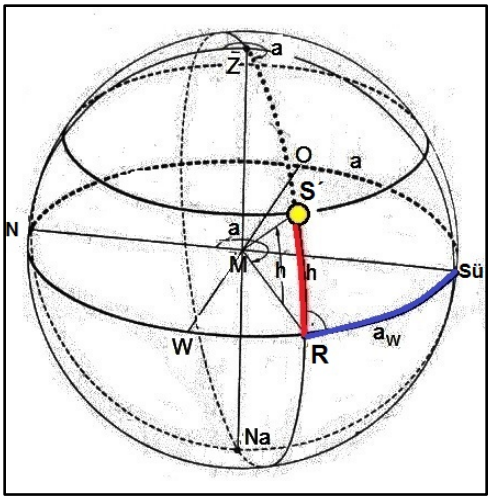
Die Schattenlänge im allgemeinen Fall

Will man die Schattenlänge für den allgemeinen Fall bestimmen, liegen keine trivialen Verhältnisse mehr vor. Um die nachfolgenden Überlegungen verstehen zu können, müssen zuvor ein paar Grundkenntnisse der sphärischen Geometrie erläutert werden.

Die astronomischen Koordinatensysteme
An der Sphäre, der Himmelskugel, zieht die Sonne ihre Bahn. Um ihren Ort an ihr anzugeben, benutzt man die beiden sphärischen Koordinatensysteme, das *Horizont*- und das *Äquatorsystem*. Ihre Elemente sind jeweils eine Bezugsebene mit einer senkrecht auf ihr stehenden Bezugsachse sowie Parallelkreise zur Bezugsebene (Kleinkreise) und senkrecht auf ihr stehende Großkreise, die sich alle in zwei gegenüberliegenden Punkten, den Antipoden, schneiden. Wie die Längen- und Breitenkreise auf der Erde bilden sie ein Gitternetz. Beim *Horizontsystem* bildet die Horizontebene (durch den Mittelpunkt der Sphäre) die Bezugsebene und die Zenit-Nadir-Achse die zugehörige Bezugsachse. Die Großkreise senkrecht auf dem Horizont nennt man Vertikalkreise, die Kleinkreise Höhenparallele. Entsprechend ist beim *Äquatorsystem* der (Himmels-)Äquator die Bezugsebene und die Polachse die Bezugsachse. Die Parallelkreise zur Äquatorebene sind hier die Deklinationskreise, die senkrecht auf ihr die Stundenkreise. Die auf dem Himmelsäquator senkrecht stehenden Großkreise, die Stundenkreise, schneiden sich alle in den Polen. Der durch Zenit und Pol laufende Großkreis ist der Meridian. Nur in diesem Fall sind Vertikal- und Stundenkreis identisch. Will man den Ort eines Gestirns in einem der beiden Systeme angeben, braucht man jeweils zwei Koordinaten. Im Äquatorsystem sind dies die Höhe h und das Azimut a. Die Höhe h ist der Winkelbogen auf einem Vertikalkreis vom Horizont bis zum Höhenkreis des Gestirns. Das Azimut a, die zweite Koordinate, ist der Winkelbogen auf dem Horizont gemessen von vom Nordpunkt über Ost bis zum Vertikalkreis des Gestirns. Das Gestirn liegt dann auf dem Schnittpunkt von Vertikal- und Höhenkreis. Im Äquatorsystem ist die erste Koordinate die Deklination δ, das ist der Bogen auf dem Stundenkreis vom Äquator bis zum Gestirn. Die zweite ist der Zeitwinkel, der Bogen auf dem Himmelsäquator vom unteren Meridian (Nordpunkt) über Ost bis zum Stundenkreis des Gestirns. Zur Vereinfachung kann man auch den Stundenwinkel t angeben. Das ist der Bogen vom oberen Meridian (Südpunkt) bis zum Stundenkreis des Gestirns. Je nach dem Ort des Gestirns kann er nach Osten als t_O oder Westen als t_W gemessen werden. In der nachfolgenden Tabelle (Abb.10) sind diese Elemente der beiden astronomischen Systeme noch einmal zusammengefasst.

	Horizontsystem	**Äquatorsystem**
Bezugsebene	Horizontebene	Himmelsäquator
Bezugsachse	Zenit-Nadir-Achse	Polachse
Kleinkreise	Höhenparallel	Deklinationsparallel
Großkreise	Vertikalkreise	Stundenkreise
Antipoden	Zenit und Nadir	Nord- und Südpol der Sphäre
Koordinaten	Azimut a u. Höhenwinkel h	Zeitwinkel T/Stundenwinkel t u. Deklination δ

Abb. 10: Elemente astronomischer Koordinatensysteme



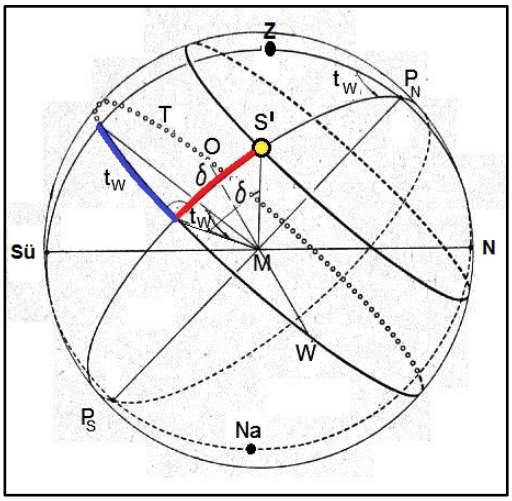


Abb. 11 u. 12:

Das Horizont- und Äquatorsystem

Zeichnerische Bestimmung der Sonnenhöhe

Will man die Sonnenhöhe zeichnerisch bestimmen, braucht man ein Verfahren, mit dem man die dreidimensionalen Beziehungen der Himmelskugel zweidimensional darstellen kann. Die *senkrechte Eintafelprojektion* stellt ein anschauliches und leicht auswertbares Bild der (räumlichen) Himmelskugel dar. In ihr werden Punkte der Kugel die vor oder hinter der Zeichenebene liegen in die Zeichenebene projiziert.

In Abb. 13f ist S´ die Projektion der Sonne S und der Bogen S´R die Höhe h, die bestimmt werden soll. Dazu klappt man den Vertikalkreis, auf dem S´ liegt, in die Zeichenebene um. Dann ist die Höhe h der Winkel HM{S}[4] oder der Bogen H{S}. Das Azimut a der Sonne sei das Bild des Bogens S´{S}. Man klappt den Höhenparallelkreis, auf dem S liegt, in die Zeichenebene. a ist dann der Winkel {S}O(S) oder der Bogen {S}(S). Auf diese Art und Weise kann man relativ genau sphärische Winkel, die unmittelbar nicht bestimmbar sind, bestimmen.

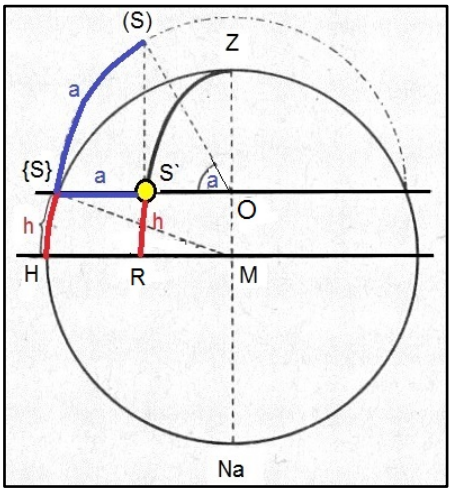


Abb. 13: Die Sonnenkoordinaten Höhe h und Azimut a

Mit diesen Vorarbeiten kann nun die Höhe h für einen konkreten Fall bestimmt werden. Die APG-Sonnenuhr steht auf dem Breitenkreis φ=51°. Es sei der 20. Mai, 9:00 WOZ. Wie hoch steht dann die Sonne? Und wie lang ist dann der Schattenwurf des Gnomons?

Man zeichnet in das Horizontsystem mit der Neigung von φ = 51° das Äquatorialsystem ein (s. Abb. 14). Sodann trägt man an die Horizontebene die Deklination δ = 20° ab. Der Bogen DÄ auf dem Umkreis ist dann die Deklination und die Parallele zum Äquator der Deklinationskreis. Als nächstes muss der Ort der Sonne auf dem Deklinationskreis bestimmt werden. Aus WOZ = 9:00 folgt für den Zeitwinkel T_o= 135°. Man klappt den Deklinationskreis in die Zeichenebene um und trägt in ihm den Zeitwinkel T_o ab. T_o ist dann der Winkel DO_1E oder der Bogen DE auf dem Umkreis. Sodann fällt man von E das Lot auf den Deklinationskreis. Damit ist die Position der Sonne auf dem Deklinationskreis bestimmt.

[4] Zur Bezeichnungsweise: S´ oder S´´ sind Bilder von S; (S) oder {S} sind Umlegungen des Punktes S in die Zeichenebene.

Um seine Höhe zu bestimmen, zeichnet man die Parallele zur Horizontebene durch S`. Sie schneidet den Umkreis in (S). Die Höhe h ist dann der Winkel HM(S) oder der Bogen H(S) auf dem Umkreis. Die Messung ergibt dann: h = 43°. Die Sonne steht also am 20. Mai um 9:00 WOZ oder 9:32 MEZ 43° über dem Horizont. Mit $\frac{l}{s} = \tanh \Leftrightarrow s = \frac{l}{\tanh}$ folgt:

$$s = \frac{3m}{\tan 43°} = \underline{\underline{3{,}22m}}$$

Nach der gleichen Methode könnte man auch das Azimut der Sonne und damit die Ausrichtung des Schattens bestimmen. Dazu muss man das Höhenparallel herausklappen. Die Senkrechte in S´ schneidet das ausgeklappte Höhenparallel in F. Das Azimut ist dann der Winkel $FO_2[S]$ oder der Bogen F[S]. Die Messung in der Zeichnung ergibt 114° (s. Abb. 15).

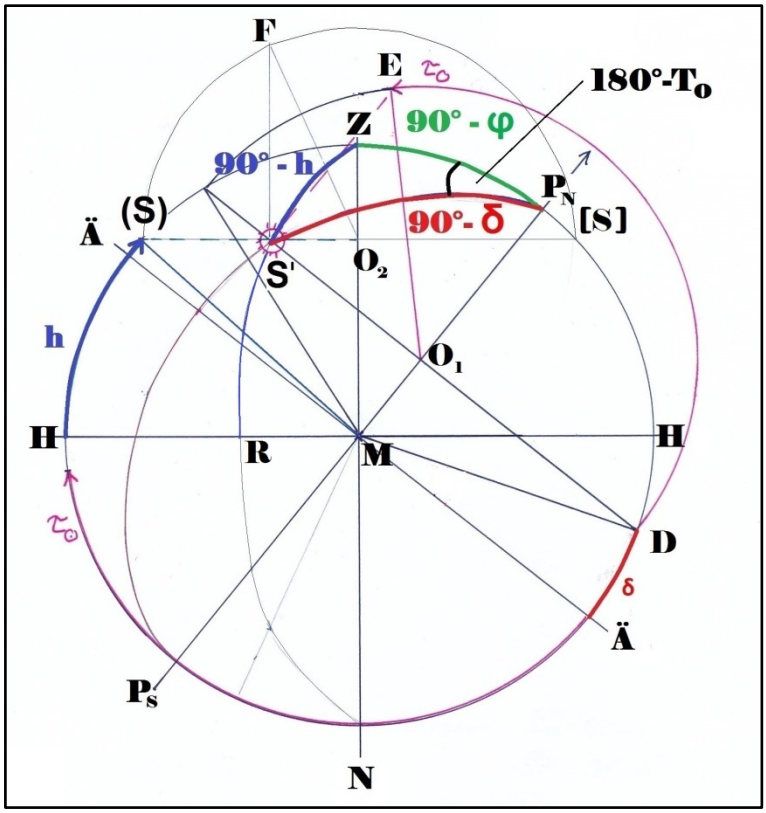


Abb. 14: Eintafelprojektion der Himmelskugel zur Bestimmung der Sonnenhöhe h

Rechnerische Bestimmung der Sonnenhöhe

Zur rechnerischen Bestimmung der Höhe h benutzt man das sphärische Dreieck $S'ZP_N$ (s. Abb. 14).

Sie haben die Besonderheit, dass ihre Seiten auch Winkel sind, nämlich Bögen auf der Einheitskugel mit dem Kugelmittelpunkt als Scheitel[5]. Solche mit den Eckpunkten Zenit Z, Himmelspol P_N und einem Gestirn werden in Astronomie und Navigation *Nautische Dreiecke* genannt. Die Seiten dieser Dreiecke sind Bögen der Großkreise von Meridian, Stunden- und Vertikalkreis des Gestirns (s.Tabelle Abb. 16).

Dreiecksseite	Großkreis
Bogen SZ	Vertikalkreis
Bogen SP_N	Stundenkreis
Bogen ZP_N	Meridian

Abb. 16: Seiten des Nautischen Dreiecks

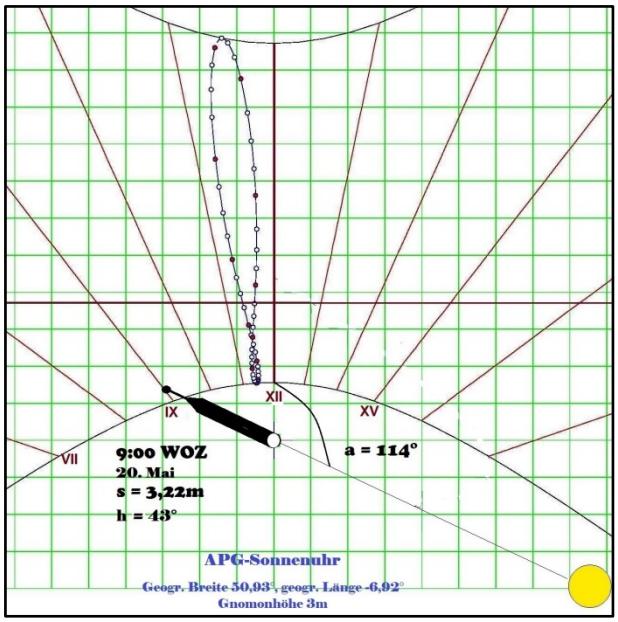


Abb. 15: Schattenwurf für den untersuchten Fall

Die für sphärische Dreiecke geltenden Gesetze sind erwartungsgemäß komplexer als die der klassischen Euklidischen Geometrie. Weil – wie oben erwähnt – die Dreiecksseiten beim sphärischen Dreieck Winkel sind, sind die trigonometrischen Beziehungen komplexer. So gibt es u.a.

[5] Eine Winkelfunktion mit einer Dreiecks*seite* als Argument (wie sina, cosb etc.) wäre beim ebenen Dreieck ein Unding, weil nur Winkelgrößen (im Grad- oder Bogenmaß) sinnvolle Argumente der Winkelfunktionen sein können (also nur Terme wie sinα, cosβ etc).

zwei Kosinussätze, nämlich einen Winkel- und einen Seitenkosinussatz. Unser Problem können wir mit dem *Seitenkosinussatz* $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$ lösen.

allg.Dreieck	**nautisches Dreieck**	
a	Bogen SZ	90°-h
b	Bogen SP_N	90°-δ
c	Bogen ZP_N	90°-φ
α	Winkel bei P_N	180°-T

Abb. 17

Mit den entsprechenden Einsetzungen für den hier zu bearbeitenden Fall (s. Tab. Abb. 17) ergibt sich:

$$\cos(90° - h) = \cos(90° - \varphi) \cdot \cos(90° - \delta)$$
$$+ \sin(90° - \varphi) \cdot \sin(90° - \delta) \cdot \cos(180° - T)$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos(180 - T)}}$$

und mit den gegebenen Werten φ=51°, δ=20° (20. Mai), T = 135° (9:00 WOZ) folgt dann:

$$\Rightarrow \sin h = \sin 51° \cdot \sin 20° + \cos 51° \cdot \cos 20° \cdot \cos(180 - 135)$$
$$\Leftrightarrow \sin h = 0{,}777 \cdot 0{,}342 + 0{,}629 \cdot 0{,}940 \cdot 0{,}574$$
$$\Leftrightarrow \sin h = 0{,}684$$
$$\Leftrightarrow h = \arcsin 0{,}684 = \underline{\underline{43°}}$$

Die Ergebnisse von Zeichnung und Rechnung stimmen überein.

Welches Verfahren ist einfacher? Ganz offensichtlich das rechnerische. Allerdings auch nur dann, wenn man die richtige sphärische trigonometrische Beziehung, den Seitenkosinussatz, gefunden hat und bei der Übertragung der Größen keine Fehler unterlaufen. Das zeichnerische Verfahren hat den Vorteil, dass es bei der Veranschaulichung der verschiedenen Winkelbeziehungen hilft - allerdings auch nur dann, wenn man bei den verschiedenen durch Umklappungen entstehenden Hilfskreise nicht die Übersicht verliert. Man sieht, beide Verfahren haben ihre Vorteile aber auch ihre Tücken.

Gut ist es, wenn man beide beherrscht, und zufriedenstellend, wenn beide dasselbe Ergebnis liefern.

Viktor Schreier März 2014

Quellennachweis:
Abb. 11 und 12 aus Reidt-Wolff, Elemente der Mathematik, Bd.4, 1961, bearbeitet